

一、多項式

1. x 的多項式的條件： x 不可在(1).分母 (2).絕對值 (3).根號
2. $\deg f(x)$ 代表多項式的次數，就是最高次方是多少次。
3. 常數項，為只有數字的那一項， x 代 0 即可得到。
4. 常數多項式 $\rightarrow f(x) = \text{數字}$
 (1) 數字 = 0 $\rightarrow f(x)$ 稱為零多項式
 (2) 數字 $\neq 0 \rightarrow f(x)$ 稱為零次多項式
5. 所有係數和， x 代 1 即可得到。
6. 多項式相等代表每一項要一模一樣

(D) 1 設 $3x^4 + 2x^2 + 1 = (a+1)x^4 + (b-1)x^3 + (c+1)x^2 + (d-3)x + (e+4)$
 則 $a+b+c+d+e = ?$ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

(A) 2. 設 a, b 為實數，若 $5x+7 = a(x+1)+b(x-1)$ 則 $a-b = ?$ (A)7 (B)8 (C)-7 (D)-8。

(A) 3. 設 $(a+b)x^2 + (2a-b)x + 5$ 為 x 的一次多項式，且一次項之係數為 3，則 $a \times b$ 之值為 (A)-1 (B)-2 (C)-3 (D)-4 (E)-5。

(B) 4. 下列何者為多項式？ (A) $\frac{1}{x} + 4$ (B) $\sqrt{2}x + 8$ (C) $\frac{13}{5x-4}$ (D) $6\sqrt{x} + 2$ 。

二、多項式的四則運算

1. 加法、減法：相同次數才能做加減。
2. 乘法：一項乘一項。係數相乘， x 次數相加。
3. 除法：被除式 = 除式 \times 商式 + 餘式 餘式的次數一定比除式的次數小
 (長除法、綜合除法一定要練習)
4. 綜合除法
 (1) 只適用除式為一次方時 (2) 缺項補 0 (3) 代入讓除式等於 0 的 x 值
 (4) 用相加 (5) 若除式 x 的係數為 a (不為 1)，則商必須再除以 a

Ex1: $3x^4 - 4x$ 除以 $x-2$

$$\begin{array}{r} 3+0+0-4+0 \big| 2 \\ +6+12+24+40 \\ \hline 3+6+12+20 \big| +40 \end{array}$$

商式為 $3x^3 + 6x^2 + 12x + 20$ ，餘式為 40

Ex2: $6x^4 + 13x^3 + 8x^2 + x + 13$ 除以 $2x+3$

$$\begin{array}{r} 6+13+8+1+13 \big| -\frac{3}{2} \\ -9-6-3+3 \\ \hline 2 \big| 6+4+2-2 \big| +16 \\ 3+2+1-1 \end{array}$$

商式為 $3x^3 + 2x^2 + x - 1$ ，餘式為 16

(D) 5. 設 $f(x)=(x^4-x^3-x^2-1)(x^3+2x^2+3)$ ，則 $f(x)$ 的 x^3 項係數為 (A)-1 (B)-2 (C)-3 (D)-4 (E)-5。

(A) 6. 求 $(2x^3-x^2+3x+1)(x^2+x+1)$ 的展開式中， x^3 項的係數為何? (A)4 (B)5 (C)6 (D)7。

(D) 7. 以 x^2+x+1 去除 x^4+3x^2-1 ，得到商為 ax^2+bx+c ，餘式為 $dx+e$ ，則 $a+b+c+d+e=$ (A)0 (B)-1 (C)-2 (D)-3。

(D) 8. 以 x^2+2x+2 除 $x^4+3x^3+2x^2+x+1$ 的餘式為 $ax+b$ ，則 $a-b=?$ (A)0 (B)1 (C)-1 (D)-2。

(B) 9. 設 $f(x)=x^2+2x+2$ 整除 $g(x)=2x^3+3x^2+ax+b$ ，則 $2a+b=?$ (A)0 (B)2 (C)4 (D)6。

(B) 10. x^2-5x+6 為多項式 x^3-3x^2+cx+d 的因式，則 $(c,d)=?$ (A) (-3,8) (B) (-4,12) (C) (-5,10) (D) (-6,8)。

(B) 11. $x^3-2x^2+x+6=A(x+2)^3+B(x+2)^2+C(x+2)+D$ ，下列何者為錯誤? (A) $A=1$ (B) $B=8$ (C) $C=21$ (D) $D=-12$ 。

(C) 12. $-2x^3-4x^2-x+3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ ，則 $a+b+c+d=?$ (A)-4 (B)-3 (C)3 (D)4。

(C)12.5 試問 3^{11} 除以 $3^2 + 3 + 1$ 之餘數為何? (A)1 (B)3 (C)9 (D)12。

三、餘式定理與因式定理

1. 餘式定理：

$f(x) \div (x-a)$ 的餘式： $f(x) = (x-a) \times \text{商式} + \text{餘式}$ \rightarrow 當 $x=a$ 時 $f(a) = \text{餘式}$

結論：只要代入讓除式等於零的 x 值，就可以得到餘式。

〈舉例〉：多項式 $f(x)$ 除以 $2x-3$ 的餘式為 $f(\frac{3}{2})$

2. 因式定理：因為是因式，所以可以整除，餘式等於零

(1) $x-a$ 是多項式 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(a)=0$

(2) $ax-b$ 是多項式 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$

(D)13. 下列何者不是多項式 $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ 的因式? (A) $x-1$ (B) $x-3$ (C) $2x+1$ (D) $2x-1$ 。

(D)14. 下列何者為 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 的因式? (A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $x-4$ (D) $x-3$ 。

(D)15. 設多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式分別為 1 與 -1 ，則 $f(x) - 2g(x)$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式為何? (A)0 (B)1 (C)2 (D)3。

(A)16. 設 $f(x)$ 為一元二次多項式，若 $f(1) = 4, f(-1) = 4, f(0) = 0$ ，則下列何者為 $f(x)$ 之因式? (A) x (B) $x-1$ (C) $x+1$ (D) $x^2 - 1$ 。

(B)17. 多項式 $4x^4 + 4x^3 + x^2 + 3$ 除以 $2x-1$ 的餘式為何? (A)3 (B)4 (C)5 (D)6。

(C)18. 設 $(x+2)$ 為 $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + ax + 2$ 的因式，則 $a = ?$ (A) -9 (B) -1 (C)1 (D)9。

第4單元 式的運算

編著 By 吳春鋒

(B) 19. $x+1$ 、 $x-1$ 為 $f(x)=2x^3-ax^2+bx+2$ 的因式，則 $2a+b=$ (A)0 (B)2 (C)4 (D)6。

(A) 20. 若 $(x-1)(x+2)$ 為 $f(x)=x^3+mx^2+nx-2$ 的因式，則 $2m+n=$ (A)3 (B)4 (C)6 (D)8。

(B) 21. 設 $f(x)$ 為 x 之多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 之餘式為 $x+1$ ，則 $f(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為何？(A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

(B) 22. 設 $x-a$ 能同時整除 $2x^2-5x-3$ 和 $4x^2+8x+3$ 則下列何者正確？(A) $-2 < a \leq -1$ (B) $-1 < a \leq 0$ (C) $0 < a \leq 1$ (D) $1 < a \leq 2$ 。

(D) 23. 設以 $x-1$ 和 $x-2$ 分別除 x^2+ax+b 的餘數相同，而以 $x-3$ 除 x^2+ax+b 的餘數為 5，則 $a+b=?$ (A)-1 (B)0 (C)1 (D)2。

(D) 24. 多項式 $f(x)=2x^3+ax^2-x+b$ ，以 $x+1$ 除之餘 -2，以 $x-2$ 除之餘 4，則 $a=$ (A)6 (B)-6 (C)3 (D)-3。

(D) 25. 設 $f(x)=mx^3+nx^2-2x+4$ ，若以 $(x-1)$ 除 $f(x)$ 得餘式為 3，以 $(x+1)$ 除 $f(x)$ 得餘式為 1，則以 $(x-2)$ 除 $f(x)$ 所得的餘式為何？(A)-8 (B)-4 (C)8 (D)16。

(B) 26. 多項式 $f(x)$ 被 $x-1$ 除，餘式為 1；被 $x-2$ 除，餘式為 2；則 $f(x)$ 被 $(x-1)(x-2)$ 除，所得餘式為 (A) $x-1$ (B) x (C) $x+1$ (D)3。

四、一元二次方程式求解公式

$$ax^2+bx+c=0 \text{ 公式解為 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1. 當 $b^2-4ac > 0$ 時： 二相異實根
2. 當 $b^2-4ac = 0$ 時： 二相等實根
3. 當 $b^2-4ac < 0$ 時： 無實數解

(C) 27. 設 $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ ，則 $(x^2+3x)^3 =$ (A)0
(B)1 (C)-1 (D)無解。

(C) 28. 設 $x = \sqrt{3} + 1$ ，則 $x^3 - 6x - 1 = ?$
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

(B) 29. 已知 $\sqrt{2} \doteq 1.414$ ， $\sqrt{3} \doteq 1.732$ ， $\sqrt{5} \doteq 2.236$ ；若 a 為二次方程式 $4x^2-4x-1=0$ 的兩根中之較大者，則 a 的值落在下列哪一個區間當中？
(A)[0,1] (B)[1,2] (C)[2,3] (D)[3,4]。

(B) 30. 下列方程式何者沒有實數解？
(A) $x^2-4=0$ (B) $x^2-2x+2=0$ (C) $2x^2+3x-4=0$
(D) $x^2-2x+1=0$ 。

(A) 31. 若 $3x^2+2x+k=0$ 有兩相等實根，則 $k = ?$
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C)1 (D) $\frac{4}{3}$ 。

(A) 32. 二次方程式 $kx^2 - (4k-3)x + 4k - 5 = 0$ 有相等實根，則 $k =$ (A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $-\frac{9}{4}$
(D) $-\frac{4}{9}$ 。

五、一元二次方程式根與係數的關係

若 α 、 β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，則

$$1. \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ (兩根和} = -\frac{b}{a}) \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ (兩根積} = \frac{c}{a}) \end{cases}$$

2. 知道兩根和、兩根積可得方程式 $x^2 - (\text{兩根和})x + (\text{兩根積}) = 0$

六、一元三次方程式

若 α 、 β 、 γ 為一元三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根，則

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

六、基本公式

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$4. (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$5. (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

(A) 33. 設方程式 $3x^2 - 2x - 4 = 0$ 之二根為 α 、 β ，則 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$ (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{3}$ 。

(B) 34. 設 α 、 β 為 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 之二根，試求 $\alpha^2 + \beta^2 =$ (A) 6 (B) 10 (C) 8 (D) 16。

(D) 35. 方程式 $2x^2 - 15x + k = 0$ 有一根為另一根的 2 倍，則 $k =$ (A) -18 (B) 18 (C) -25 (D) 25。

(D) 36. 已知方程式 $2x^2 - 30x + k = 0$ 的兩根為連續自然數，則 $k = ?$ (A) 106 (B) 108 (C) 110 (D) 112。

(B)37.已知一元二次方程式的兩根之積為-12，兩根之平方和為 25，且兩根之和為正數，則其方程式為何？ (A) $x^2-x+12=0$ (B) $x^2-x-12=0$ (C) $x^2+x-12=0$ (D) $x^2+x+12=0$ 。

(C)38.設 a, b 為常數，若方程式 $x^3+6x^2+ax+b=0$ 的三根相等，則下列何者正確？ (A) $2a=-3b$ (B) $3a=-2b$ (C) $2a=3b$ (D) $3a=2b$

(C)39.下列何者為方程式 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=60$ 的正整數解？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

(D)40.化 $\frac{x+2}{(x+1)(x-1)^2}$ 為部分分式得 $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ ，則 $a+b+c=$ (B) 1 (B) -1 (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$ 。

第一題：你參加賽跑，追過第 2 名，你是第幾名？

解答：如果你的回答是第 1 名，你就錯了！你如果追過第 2 名，你只是取代那人的位置，你是第 2 名。

第二題：你參加賽跑，你追過最後一名，你是第幾名

解答：如果你的回答是倒數第 2 名，你又錯了！告訴我，你怎能追過最後一名？本題無解才對！

別說你腦袋不好，給個加分題：一個啞巴想買牙刷，他模仿刷牙的動作，成功的向店主表達，也完成了購買。現在如果一個瞎子想買一副太陽眼鏡，他要如何表達？

解答：他只要張開嘴說話即可。他是瞎子，可不是啞巴。就這麼簡單！

數學也是這麼簡單，不會要問的！！